Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В магическом квадрате* 3×3 *известны только три числа из девяти — см. рисунок. Восстановите магический квадрат.*

2		
	6	
7		

К решению задачи 7.1

Решение: Пусть сумма чисел в каждой из строк (столбцов, диагоналей) равна S. Эта сумма называется магической. Тогда в правом нижнем углу стоит число $S-8$, в правом верхнем — число $S-13$, а в центре левого столбца — число $S-9$. Анализируя строки (сумма в каждой строке S), находим числа, стоящие в середине верхней строки (это 11), в середине нижней (1), и в конце средней (3). Получается квадрат, как на левом рисунке. У него уже сумма чисел в каждой строке, в каждой диагонали, и в первом столбце S, поэтому для того, чтобы он был магическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы чисел во втором и третьем столбцах равнялись S, то есть должны выполняться равенства $11+6+1=S$ и $S-13+3+S-8=S$. Оба уравнения приводят к равенству $S=18$. Получаем магический квадрат (см. рисунок справа).

2	11	S-13
S-9	6	3
7	1	S-8

2	11	5
9	6	3
7	1	10

К решению задачи 7.1

Примечание 1: В приведённом решении обоснована единственность указанного магического квадрата. Для решения задачи она не требуется; достаточно просто привести квадрат на рисунке справа.

Примечание 2: Приведённый способ нахождения магического квадрата не единственен; возможны и другие решения.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
приведён верный магический квадрат	7 баллов
верно составлена система уравнений, решающая задачу но система решена неверно из-за арифметических ошибок	6 баллов
верно составлена система уравнений, решающая задачу, но эта система не решена	4 балла
верно найдены только некоторые числа квадрата и в решении не указан (или указан неверно) способ найти остальные числа	3 балла
введены переменные и имеется попытка (неудачная) записать условие в виде системы уравнений с этими переменными	1 балл

7.2. *Имеются 4 одинаковых по виду арбуза, любые два из которых имеют разный вес. Покажите, как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти пару самых тяжёлых арбузов.*

Решение: Обозначим арбузы буквами A, B, C, D. Первыми двумя взвешиваниями сравниваем A с B и C с D. Без ограничения общности, пусть тяжелее оказались арбузы A и C. Сравниваем третьим взвешиванием их веса. Если перетянул арбуз A — то он самый тяжёлый; тогда вторым по тяжести не может быть арбуз D — арбузы A и C его тяжелее. Сравниваем последним взвешиванием арбузы B и C — задача решена. Аналогично, если при третьем взвешивании перевесит арбуз C, то он — самый тяжёлый, а второй по тяжести — либо D, либо A. Какой именно — определяется четвёртым взвешиванием.

Примечание: В приведённом решении сделано больше, чем требуется, а именно, найдена не только самая тяжёлая пара арбузов, но и установлено, какой арбуз самый тяжёлый, а какой — второй по весу. Авторам неизвестен способ нахождения за 4 взвешивания самой тяжёлой пары без выяснения, какой из арбузов самый тяжёлый, однако, это не означает, что его нет. Если такой способ будет приведён в решении — решение задачи полное.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
указан верный алгоритм для нахождения самой тяжёлой пары арбузов за 4 взвешивания	7 баллов
либо указан алгоритм, решающий задачу за 5 взвешиваний, либо приведённый алгоритм решает задачу только в частных случаях	3 балла
указан верный алгоритм для нахождения самого тяжёлого арбуза за 3 взвешивания без дальнейшего продвижения к решению	2 балла
алгоритмы, решающие задачу более, чем за 5 взвешиваний (в любом количестве)	0 баллов

7.3. *У крестьянина была коза, корова и кобыла, и ещё стог сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову 3/4 месяца, или же корову и кобылу 1/3 месяца. Отец не согласился с подсчётами сына. Докажите, что у него были на это основания, то есть сын неправ.*

Решение:

Способ 1. (логический). Пусть сын прав. Рассмотрим стадо, состоящее из 2 коз, 2 коров и 2 кобыл, и пусть они питаются сеном в течение года. Тогда за это время будет съедено: одной козой и одной кобылой 12 стогов, второй козой и одной коровой 16 стогов, второй кобылой и второй коровой — ещё 36 стогов, а всего 64 стога. Значит, коза, корова и кобыла в год съедают 32 стога, а в месяц 32/12=8/3 стога. Так как коза и кобыла съедают один стог в месяц, то остальные 5/3 стога съедает корова. А за 3/4 месяца она съест 5/4 стога, в то время как вместе с козой она за это время съедает стог. Вывод: коза съедает в месяц отрицательное количество сена (точно $-1/3$ стога). Противоречие.

Способ 2. (алгебраический). Пусть коза, кобыла и корова съедают в месяц x, y и z стогов сена соответственно. Тогда имеем систему трёх уравнений

$$\begin{cases} x+y &= 1, \\ (x+z)\cdot\dfrac{3}{4} &= 1, \\ (y+z)\cdot\dfrac{1}{3} &= 1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 4/3, третье — на 3, после чего вычтем третье уравнение из суммы первых двух. Получим $2x = 1 + \dfrac{4}{3} - 3$, откуда число x отрицательно. Это невозможно по смыслу переменной x.

Примечание 1: Система уравнений, возникшая в алгебраическом способе решения, может быть решена и иначе.

Примечание 2: Существуют принципиально другие логические решения.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство противоречивости утверждений сына	7 баллов
в принципиально верном доказательстве имеются арифметические ошибки (не влияющие на ход решения)	6 баллов
найдено какое количество сена съедают коза, корова и кобыла совместно за фиксированный промежуток времени	5 баллов
верно составлена, но не решена система уравнений, решающая задачу	3 балла
доказаны только некоторые верные факты, касающиеся скорости поедания сена животными (например, то, что корова прожорливее кобылы)	1 балл

7.4. *Во фразе*

РАЙОННАЯ ОЛИМПИАДА ДВЕ ТЫСЯЧИ ЧЕТЫРНАДЦАТОГО ГОДА

передвинем в каждом слове первую букву на последнее место:

АЙОННАЯР ЛИМПИАДАО ВЕД ЫСЯЧИТ ЕТЫРНАДЦАТОГОЧ ОДАГ.

Сделаем то же самое с полученным текстом, и так далее. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту? Ответ обосновать.

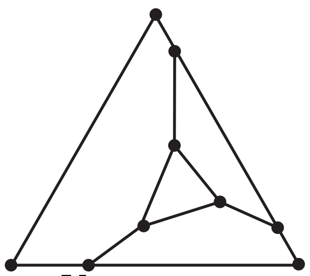
Решение: Каждое слово фразы впервые повторится после числа операций, равному числу букв в этом слове, то есть слово РАЙОННАЯ — через 8, ОЛИМПИАДА — через 9, ДВЕ — через 3, ТЫСЯЧИ — через 6, ЧЕТЫРНАДЦАТОГО — через 14 и ГОДА — через 4. Дальнейшие повторения будут через такое же число операций (например, слово ДВЕ повторится через 6, 9, 12, 15, … операций). Чтобы вновь возник исходный текст, необходимо и достаточно, чтобы количество операций делилось без остатка на все числа 8, 9, 3, 6, 14 и 4, то есть оно должно делиться на НОК всех этих 6 чисел. Этот НОК равен $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. Именно через столько операций текст повторится в первый раз.

Ответ: Через 504 операции.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ (доказано, что через 504 операции наступит повтор и наступит ВПЕРВЫЕ)	7 баллов
верное решение, приведшее к неверному ответу из-за арифметической ошибки (ошибок)	6 баллов
обосновано найдено некоторое количество операций (не минимальное), через которое обязательно возникнет повтор (напр. произведение количеств букв в словах)	4 балла
указано, что искомое число операций должно делиться на количество букв каждого слова	3 балла
верный ответ без доказательства того, что раньше повтора начальной позиции не случится	1 балл
поиск ответа прямым осуществлением указанного в задаче преобразования (если он не доведён до верного ответа)	0 баллов

7.5. *Разрежьте равносторонний треугольник на 4 выпуклых многоугольника: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. (Многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда любая его диагональ целиком лежит внутри него.)*


К решению задачи 7.5

Решение:

Ответ: См. рисунок.

Примечание: Так как все многоугольники должны быть выпуклыми, никакие два из них не могут пересекаться иначе, чем по части стороны. Тогда среди сторон шестиугольника не более одной лежит на границе с каждой из трёх остальных фигур, поэтому остальные три его стороны должны лежать на сторонах исходного треугольника. Несложно убедиться, что единственный допустимый случай — это когда шестиугольник и исходный треугольник имеют два общих угла (и сторону между ними). Аналогично показывается, что пятиугольник имеет с исходным треугольником общий угол. Таким образом, **не существует разрезаний, принципиально отличающихся от приведённого**. Разумеется, то что данный треугольник правильный, не играет для решения никакой роли.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
верный пример разрезания	7 баллов
пример разрезания, при котором не все полученные многоугольники выпуклы	2 балла
указание факта, что правильность разрезаемого треугольника не существенна	1 балл
прочие разрезания, не удовлетворяющие условию (на большее число многоугольников, на многоугольники с другим числом сторон и пр.), в любом количестве	0 баллов

7.6. *Восемь богатырей (среди них был Илья Муромец) вели бой со Змеем Горынычем. В каждой схватке погибала половина живых богатырей, но каждый богатырь в каждой схватке (даже если он погибал) срубал по одной голове у Змея. После каждой схватки, если у Змея оставалось $2N$ или $2N+1$ голов (N — натуральное число), у него вырастало дополнительно ещё N голов. Так продолжалось до тех пор, пока в живых не остался один Илья Муромец. Он-то и срубил последнюю голову Змея. Сколько голов у Змея было в начале боя? Ответ обосновать.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Решение с конца. В последнюю схватку у Змея отрубили только одну голову, поэтому перед последней схваткой голов у Змея не вырастало. Значит, после предпоследней схватки у Змея осталась одна голова. Так как эту предпоследнюю схватку вели два богатыря (один в итоге погиб), то перед ней у Змея было 3 головы. Одна из них выросла между предпоследней и третьей с конца схваткой. Значит, после третьей с конца схватки у Змея оставались 2 головы, а так как ту схватку вели уже 4 богатыря, то перед ней у Змея было 6 голов. Треть из них, то есть 2 головы выросли между четвёртой и третьей схватками (с конца). Значит после четвёртой схватки оставалось у Змея 4 головы. Схватку вели 8 богатырей, каждый срубил по голове, значит у Горыныча изначально было 12 голов.

<u>Способ 2.</u> У Змея явно больше 8 голов (иначе он будет убит в первую же схватку), но явно меньше 24 (иначе после каждой схватки он сможет восстанавливать все отрубленные головы). Достаточно просто перебрать все оставшиеся 15 возможностей (число голов с 9 до 23) и выбрать верный ответ. Но, конечно, перебор лучше сократить. Заметим, что схваток было 4 (в последней сразились Илья Муромец и последняя голова), за все схватки у Горыныча было отрублено $8+4+2+1=15$ голов, ещё по крайней мере две выросло по ходу битвы (в паузах после первой и второй схваток; после третьей схватки, очевидно, головы не вырастали). Таким образом, изначально голов было не больше 13. Если их было ровно 13, то после первой схватки осталось бы 5, выросло 2, всего 7. После второй останется 3 голо-

вы, одна вырастет — всего 4, после третьей останется 2 головы, одна вырастет — итого 3, и трёхголовое чудовище уничтожит последнего богатыря. Аналогичный расчёт для 12 голов показывает, что это количество удовлетворяет условию задачи. Если же голов 11 (тем более, если меньше), то легко проверить, что за три схватки Змей будет убит. Значит, ответ 12 — единственный.

Ответ: 12 голов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верный и обоснованный ответ с доказательством его единственности	7 баллов
неверный из-за ошибки в счёте ответ при верном в остальном решении	6 баллов
верный ответ (показано, что 12 голов удовлетворяет условию) без обоснования его единственности в частности, решение перебором случаев	4 балла
обосновано, что голов меньше, чем 24 и/или больше 8 (без дальнейшего продвижения)	3 балла
Не доведённая до ответа попытка решить задачу “с конца”	2 балла
указание на монотонность (с ростом числа голов уменьшается число выживших богатырей) без дальнейшего продвижения	1 балл
ответ без обоснования	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

2		
	4	
		6

К решению задачи 8.1

8.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В квадрате* 3×3 *заполнены только три позиции из девяти — см.рисунок.*

а) Дополните этот квадрат числами так, чтобы он стал магическим.

б) Однозначно ли такое дополнение?

Ответ обосновать.

Решение: Квадрат легко достраивается до магического самыми разными способами. На рисунке приведены два из них (квадраты слева и в центре).

2	6	4
6	4	2
4	2	6

2	5	5
7	4	1
3	3	6

2	12-x	x-2
x	4	8-x
10-x	x-4	6

К решению задачи 8.1

Наиболее просто получить способ на рисунке слева. Надо просто предположить, что в каждой строчке и столбце квадрата есть по одному числу 2, 4 и 6. Квадрат тогда строится однозначно, и легко проверить, что он магический. Другие примеры получить несколько сложнее. Их общий вид можно получить, например, следующим способом. Нам известна так называемая "магическая сумма" (сумма чисел в строке); она равна 12. Обозначим одно из оставшихся чисел через переменную x и выразим через него все остальные элементы квадрата. На рисунке справа за x взято первое число второй строки. Далее можно двигаясь по периметру (порядок не единственный) последовательно найти первое число третьей строки, второе число третьей, третье число второй, третье число первой и второе число первой. После этого остаётся проверить, что по линиям, которые не использовались при заполнении (второй столбец и вторая диагональ) суммы также равны 12. Теперь в качестве x можно взять любое число — получится свой магический квадрат. Так, средний квадрат получается при $x = 7$.

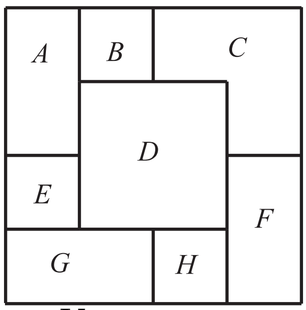
Примечание: Доказать пункт б) можно и не строя никаких примеров. Для этого достаточно показать, что если есть один такой квадрат, то и найдётся и другой.

Второй квадрат строится из первого, например так: добавляем одно и то же число к числам, стоящим в первой, второй и третьей строках на втором, третьем и первом месте соответственно, и это же число отнимаем из чисел, стоящих в первой, второй и третьей строках на третьем, первом и втором месте соответственно. Нетрудно проверить, что при таком преобразовании все интересующие нас суммы не меняются.

Ответ: б) Дополнение не однозначно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное решение обоих пунктов задачи (достаточно привести 2 примера)	7 баллов
решение только одного пункта (либо только один пример, либо при отсутствии любых примеров доказательство, что из одного квадрата можно построить другой)	3 балла
неверные примеры в любом количестве	без оценки
ответ на пункт (б) без обоснования	0 баллов



К решению задачи 8.2

8.2. *Восемь квадратных листов бумаги, все в точности одного и того же размера, были размещены, как показано на рисунке, частично перекрывая один другой. Перечислите все восемь квадратов бумаги в порядке от верхнего листа к нижнему. Ответ обоснуйте.*

Решение: Самый верхний квадрат должен иметь наибольшую площадь из всех видимых, значит, это квадрат D. Все остальные квадраты имеют тот же размер, отсюда квадрат A (один из его углов совпадает с левым верхним углом большого квадрата) лежит ниже квадрата B (будем это записывать неравенством $A < B$). Аналогично $G < E$ и $F < H$. Кроме того $B < C$ (так как квадрат B идёт вправо от границы с квадратом A). Также $E < A$ и $H < G$. Получили цепочку $F < H < G < E < A < B < C$, которая и показывает порядок квадратов.

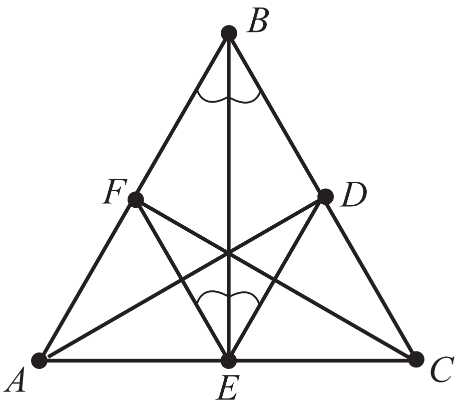
Ответ: D, C, B, A, E, G, H, F.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
указана верная последовательность квадратов	7 баллов
последовательность указана в обратном порядке	6 баллов
последовательность неверна, но может быть исправлена сменой места ровно одного квадрата	3 балла
другие случаи	0 баллов

8.3. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF.*

Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ — ромб. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.



К решению задачи 8.3

Решение: Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, поэтому $\angle BAC = \angle BCA$, значит, в треугольнике ABC отрезок BE — высота и биссектриса. Тогда $AB = BC$ (треугольник равнобедренный) и E — середина отрезка AC. Противоположные стороны ромба лежат на параллельных прямых, поэтому в треугольнике ABC отрезок ED — средняя линяя (проходит через середину стороны AC параллельно стороне AB). Тогда AD — медиана и высота треугольника ABC, поэтому $AB = AC$ и треугольник ABC равносторонний.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
доказано, что $AB = AC$ ($BC = AC$) (без доказательства $AB = BC$)	5 баллов
обосновано, что ED (EF) или FD — средняя линия треугольника	3 балла
доказано, что $AB = BC$	2 балла
не доказана даже равнобедренность ΔABC	0 баллов

8.4. *Пусть числа a, b и c (не обязательно целые) таковы, что $a + b + c = 7$ и $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0{,}7$.*

а) Приведите пример хотя бы одной такой тройки чисел;

б) Определите, какие значения может принимать сумма

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

.

Решение: а) Привести пример несложно: числа 1, 2, 4 в любом порядке. Это единственная тройка различных натуральных чисел, удовлетворяющая первому уравнению, поэтому её нахождение трудности не вызывает, надо только проверить, что $\dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{2+4} + \dfrac{1}{4+1} = 0,7$. Если числа не обязательно натуральные, то таких троек бесконечно много, хотя найти хотя бы одну, отличную от приведённой, непросто.

б) Пусть a, b, c — некоторые три числа, удовлетворяющие условию. Заметим, что $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{7-(b+c)}{b+c} = \dfrac{7}{b+c} - 1$. Также преобразуем две другие дроби. Тогда

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{7}{b+c} - 1 + \frac{7}{c+a} - 1 + \frac{7}{a+b} - 1 = 7 \cdot 0{,}7 - 3 = 1{,}9.$$

Ответ: а) например, 1, 2, 4; б) 1,9.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верно решены оба пункта (а) и (б)	7 баллов
верное решение обоих пунктов с неверным вследствие арифметической ошибки ответом к пункту (б)	6 баллов
верное решение только пункта (б)	5 баллов
верное решение только пункта (б) с неверным вследствие арифметической ошибки ответом	4 балла
верное решение только пункта (а) (количество примеров любое; если для них подсчитана искомая в пункте (б) сумма, то общее количество баллов не увеличивается)	2 балла
неверные примеры троек чисел	не оцениваются

8.5. *Баба–Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов, при этом общее количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в 12 раз больше, чем на мухоморах Кощея. Когда Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 7 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не менее 20 мухоморов.*

Решение: Пусть на мухоморах Кощея a крапинок; тогда на мухоморах Бабы Яги $12a$ крапинок. Пусть на отданном Кощею мухоморе b крапинок; тогда имеем, что $12a - b = 7(a + b)$, откуда $5a = 8b$ или $a = 1{,}6b$. На оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок $12a - b = 18{,}2b$, то есть более, чем в 18 раз больше, чем на отданном мухоморе. Так как на каждом из оставшихся мухоморов крапинок не больше, чем на отданном, то осталось у Яги не меньше 19 мухоморов, а всего она собрала не меньше 20.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство (приводить пример, подтверждающий условие не требуется)	7 баллов
арифметические ошибки, не влияющие на ход доказательства	баллы не понижаются
обосновано, что на оставшихся у Бабы Яги мухоморах крапинок больше, чем на отданном, более чем в 18 раз	5 баллов
верно составлено, но не решено диофантово уравнение	3 балла
задача проиллюстрирована на примерах	0 баллов

8.6. *Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на разность $ab - cd$. Докажите, что эта разность равна $+1$ или -1.*

Решение:

Способ 1. Будем считать разность $x = ab - cd$ положительной (в противном случае положим x равным $cd - ab$). Пусть числа a_1, b_1, c_1 и d_1 — частные от деления соответственно чисел a, b, c и d на x (все числа натуральные). Тогда $a = xa_1$, $b = xb_1$, $c = xc_1$, $d = xd_1$. Имеем $x = ab - cd = x^2a_1b_1 - x^2c_1d_1$. Тогда, так как $x \neq 0$, имеем $1 = x(a_1b_1 - c_1d_1)$. Число $a_1b_1 - c_1d_1$ целое, то есть число x является делителем 1. Но у единицы только один натуральный делитель: 1. Утверждение доказано.

Способ 2. Пусть $x = |ab - cd|$. Ясно, что x — число натуральное, поэтому $x \leqslant x^2$. Так как на x делится каждое из чисел a, b, c и d, каждое из попарных произведений этих чисел делится на x^2, а тогда и число $x = |ab - cd|$ также делится на x^2, откуда $x \geqslant x^2$. Тогда $x^2 = x$, $x = 1$ и утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
доказаны частные утверждения про разность $ab - cd$ (напр. доказано, что она не может быть чётной)	1 балл
задача проиллюстрирована на примерах	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

2		
	4	
		8

К решению задачи 9.1

9.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В квадрате 3×3 заполнены только три позиции из девяти — см.рисунок. Можно ли дополнить этот квадрат шестью числами так, чтобы он стали магическим? Ответ обосновать.*

Решение: Попробуем достроить квадрат до магического. Начнём заполнение с правого верхнего угла. Так как мы не знаем, какое число можно туда поставить, обозначим его переменной x — см. рисунок.

2		x
$x+4$ $x+2$	4	$6-x$
$10-x$		8

К решению задачи 9.1

Нам известна сумма чисел по одной из диагоналей: 14; она же равна сумме чисел на другой диагонали, в каждой строке и каждой столбце — это, так называемая, *магическая* сумма. Значит, в левом нижнем углу стоит число $14 - 4 - x = 10 - x$, во второй строке справа — число $14 - 8 - x = 6 - x$. Теперь из подсчёта чисел в средней строке получаем, что в ней слева стоит число $x + 4$, а из первого столбца видим, что это число равно $x + 2$. Так как $x + 4 \neq x + 2$ для всех x, получаем противоречие, которое показывает, что дополнить квадрат до магического невозможно

Ответ: Нельзя.

Примечание: Разумеется, можно обозначить через неизвестное число, стоящее в любой другой незаполненной клетке. Аналогичным образом возникнет противоречие.

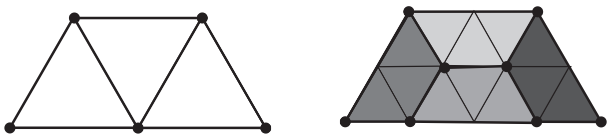
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство невозможности заполнения квадрата	7 баллов
в верном доказательстве имеются арифметические ошибки, не влияющие на ход доказательства	6 баллов
корректное составление несовместной системы уравнений без верного доказательства того, что эта система несовместна	3 балла
ответ без обоснования или любая попытка доказать, что ответ положительный или иллюстрация отрицательного ответа на нескольких примерах	0 баллов

9.2. *Существует ли многоугольник, который можно разрезать, как на три равных треугольника, так и на четыре равных четырёхугольника? Ответ обосно-*

вать.

Решение: Один из таких многоугольников — это равнобедренная трапеция, у которой одно основание вдвое меньше другого и равно боковой стороне. Она складывается как из трёх равносторонних треугольников (см. рисунок слева), так и из четырёх подобных ей трапеций (см. рисунок справа). Для того, чтобы увидеть второе разрезание (первое можно считать очевидным), проще всего провести в треугольниках из первого разрезания все средние линии. Трапеция распадётся на 12 маленьких треугольников, которые надо сгруппировать по 3.



К решению задачи 9.2

Ответ: Существует.

Примечание: Такой многоугольник, скорее всего, не единственный, однако авторам другие примеры не известны

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
приведён верный пример многоугольника и показаны оба его разрезания	7 баллов
приведён верный пример многоугольника, но указано только одно его разрезание (либо на 3 равных части, либо на 4)	5 баллов
приведён верный пример многоугольника, но требуемые его разрезания не указаны	2 балла
попытка доказать отрицательный ответ или верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	0 баллов

9.3. *Известно, что ни одно из чисел a, b и c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из четырёх чисел ab, bc, ca, abc — целое? Ответ обосновать.*

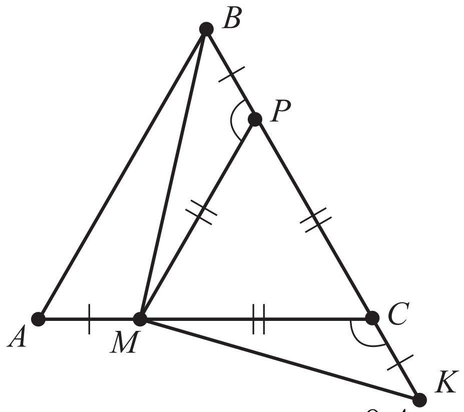
Решение: Построим в общем виде один из примеров. Пусть x, y, z — различные простые числа (можно также взять попарно взаимно-простые, большие 1). Положим $a = xy/z$, $b = xz/y$, $c = zy/x$. Легко убедиться, что условие задачи выполнено: каждое из чисел a, b и c не будет целым ввиду взаимной простоты числителя и знаменателя, в то время как $ab = x^2$, $bc = z^2$, $ca = y^2$ и $abc = xyz$ — все числа целые. В частности, при $x = 2$, $y = 3$ и $z = 5$ получаем $a = 6/5$, $b = 10/3$, $c = 15/2$, $ab = 4$, $bc = 25$, $ca = 9$.

Ответ: Такое может случиться.

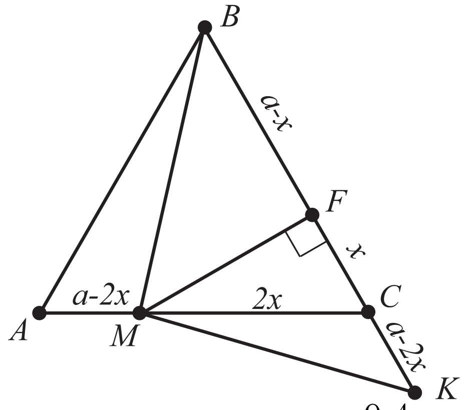
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное обоснованное решение (достаточно одного конкретного примера таких чисел)	7 баллов
числа не приведены, но есть конструкция, их получающая. При этом не показано, что полученные числа подойдут	5 баллов
числа не приведены, а конструкция, их получающая не всегда сработает (напр. в приведённом выше решении не указано, что x, y, z взаимно просты.)	3 балла
попытка доказать отрицательный ответ или верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) или неверные примеры (в любом количестве)	0 баллов

9.4. *На стороне AC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны BC за вершину C — точка K таким образом, что $AM = CK$. Докажите, что $MB = MK$.*



к решению задачи 9.4, первый способ



к решению задачи 9.4, второй способ

Решение:

Способ 1. Проведём через точку M прямую, параллельную стороне BA. Она отсечёт от треугольника ABC подобный ему треугольник CMP (см. рисунок). Этот треугольник правильный, поэтому $CM = CP$. Тогда $BP = BC - PC = AC - CM = AM = CK$. Кроме того, $\angle BPM = 120^\circ = \angle MCK$. Значит, треугольники BMP и MCK равны по двум сторонами углу между ними. Отсюда $MB = MK$, что и требовалось доказать.

Способ 2. Опустим перпендикуляр MF из точки M на сторону BC (см. рисунок). Треугольник MFC прямоугольный с углом $C = 60^\circ$, поэтому его меньший катет равен половине гипотенузы. Пусть сторона треугольника ABC равна a, длина отрезка MC равна $2x$. Тогда $CK = AM = a - 2x$, $CF = x$, $BF = a - CF = a - x$ и $FK = FC + CK = x + a - 2x = a - x$. Итак, $BF = FK$, высота треугольника BMK является его медианой, значит, треугольник MBK равнобедренный, что и требовалось доказать.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
при доказательстве равенства треугольников нет ссылки на конкретные признаки	баллы не понижать
выполнено дополнительное построение, ведущее к решению, но доказательства нет	3 балла
другие случаи	0 баллов

9.5. *Докажите, что для положительных чисел a, b, c не могут одновременно выполняться неравенства $a(1-b) \geqslant b(1-c) \geqslant c(1-a) > \frac{1}{4}$.*

Решение: Предположим противное, то есть пусть для некоторых положительных чисел a, b, c неравенства выполнены. Тогда все числа a, b, c меньше 1 (иначе выражение в какой-то скобке отрицательно) и выполняется система

$$\begin{cases} a(1-b) & > \frac{1}{4} \\ b(1-c) & > \frac{1}{4} \\ c(1-a) & > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части неравенств (это допустимо, так как они положительны). Получим неравенство - следствие $abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{4^3}$. Тогда хотя бы одно из произведений (они положительны!) $a(1-a)$, $b(1-b)$ и $c(1-c)$ больше $\frac{1}{4}$. Но $a(1-a) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Аналогичные неравенства верны для чисел b и c. Противоречие.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
получено, но не доказано неравенство $abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{4^3}$	4 балла
рассмотрен случай $a = b = c$ или доказано, что $a(1-a) \leqslant 1/4$	3 балла
замечено, что при $a = b = c = 1/2$ достигается граница, то есть что нестрогое неравенство может выполняться	2 балла
замечено, что все числа меньше 1	1 балл
иллюстрация неравенства на конкретных примерах или алгебраические выкладки (любой длины), не ведущие к решению	0 баллов

9.6. *Трёхголовый Змей Горыныч праздновал свой день рождения. Три его головы по очереди лакомились именинными пирогами и за 15 минут съели два одинаковых пирога. Известно, что каждая голова ела столько времени, сколько понадобилось бы двум другим, чтобы вместе съесть один такой же пирог. Каждая голова ест пирог с собственной постоянной скоростью. За сколько минут три головы Змея Горыныча съели бы вместе один такой же пирог? Ответ обосновать.*

Решение:

Способ 1. (логический) Представим себе, что Змей Горыныч ел не 2 пирога, как в условии, а 5. При этом ел их так: первые два пирога головы ели по очереди, как в условии, но пока одна из голов их поглощала, две другие съедали ещё один пирог. (По условию им на это времени как раз и хватало). Тогда все головы едят непрерывно в течении 15 минут и съедают полностью 5 пирогов. Значит, один пирог был бы съеден за $15 : 5 = 3$ минуты.

Способ 2. (алгебраический) Пусть x_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) — скорость поедания пирогов i-ой головой (скорость измеряется в пирогах за минуту). Нас интересует величина $\dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3}$. А условие задачи записывается уравнениями

$$\frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_1 + x_3} + \frac{1}{x_2 + x_3} = 15$$

и

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} = 2.$$

Заметим, что $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} - 1$. Преобразовав таким образом все дроби второго уравнения, получим

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_3 + x_1} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_2} - 3 = 2$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2}\right) = 5$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)15 = 5,$$

откуда $\dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = 3$.

Ответ: За 3 минуты.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верный и обоснованный ответ	7 баллов
верное решение с неверным из-за арифметических ошибок ответом	6 баллов
имеется идея рассмотреть такое поедание пирогов, как указано в первом способе решения	5 баллов
составлена верная система уравнений, но она не решена (если при этом указана величина, которую надо найти, то количество баллов увеличивается на 1)	2 балла
верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) или рассмотрены частные случаи, напр. когда две головы едят с одинаковой скоростью	1 балл

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

20	14	

К решению задачи 10.1

10.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В магическом квадрате* 3×3 *известны только два числа из девяти — см. рисунок.*

а) Приведите пример такого магического квадрата.

б) Однозначно ли определяется магический квадрат по условиям задачи?

в) Можно ли наверняка определить ещё хотя бы одно число квадрата?

Ответы обосновать.

a	$b-a+14$	$a+6$
20	14	$a+b-14$
b	$a-b+14$	$b+6$

К решению задачи 10.1

Решение: Рассмотрим произвольный магический квадрат, удовлетворяющий условию задачи. Обозначим число, стоящее в левом верхнем углу, через a, в левом нижнем — через b. Тогда сумма чисел в первом столбце (она же сумма чисел в любом другом столбце, строке или диагонали) — магическая сумма — равна $a + b + 20$. Посмотрев на получающиеся суммы в средней строке и на двух диагоналях, получим, что правом столбце получатся числа (сверху вниз) $6 + a$, $a + b - 14$ и $6 + b$. Теперь из первой и третьей строк найдём, что во втором столбце сверху стоит $b - a + 14$, а снизу $a - b + 14$ — см. рисунок. Заметим, что при любых a и b теперь суммы по всем горизонталям, первому столбцу и обеим диагоналям равны $a + b + 20$, а по второму и третьему столбцу соответственно равны 42 и $2a + 2b - 2$. Чтобы квадрат был магическим, необходимо и достаточно выполнения двойного равенства $a + b + 20 = 42 = 2a + 2b - 2$. Легко увидеть, что первое равенство равносильно второму, поэтому условие на самом деле одно: $a + b = 22$.

Теперь ответы на все вопросы задачи очевидны. Для приведения примера (пункт «а») достаточно выбрать в качестве a и b любые числа, дающие в сумме 22, например, $a = 2$, $b = 20$ или $a = 11 + 2\sqrt{3}$ и $b = 11 - 2\sqrt{3}$. Два таких примера дадут отрицательный ответ на вопрос пункта «б». Для ответа на вопрос пункта «в» достаточно заметить, что третье число второй строки равно $a+b-14 = 22-14 = 8$ и от a и b не зависит.

Примечание 1: Можно получить общий вид магического квадрата, как функцию от одной переменной, например, через переменную a. Для этого надо исключить вторую переменную, то есть заменить всюду b на $22-a$. Полученный квадрат изображён на рисунке.

a	$36-2a$	$a+6$
20	14	8
$22-a$	$2a-8$	$28-a$

К решению задачи 10.1

Примечание 2: Вместо a и b можно было ввести какие-нибудь две другие неизвестные, например, взять за одну из неизвестных магическую сумму, за вторую — число в середине верхней строки. Общий вид допустимых квадратов при этом может измениться, но не сильно: правильной заменой переменной квадрат можно будет свести к изображённому на рисунке. И, конечно, во всех случаях третье число второй строки будет 8.

Примечание 3: Конкретные магические квадраты получатся, если единственной оставшейся переменной присвоить любое значение. Если общий вид квадрата получен, то можно считать, что получены ответы на все три пункта задачи.

Ответ: а) Годится любой квадрат типа приведённого на втором рисунке. б) Не однозначно. в) Можно определить третье число второй строки (и только его) — это число 8.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ на все пункты (а), (б), (в) или получен общий вид всех допустимых магических квадратов	7 баллов
приведён один пример и доказано, что третье число второй строки определено условиями однозначно	5 баллов
приведены хотя бы два верных примера (верно решены пункты (а) и (б)) или доказано, что третье число второй строки определено однозначно	3 балла
приведён только один верный пример, то есть решён только пункт (а)	1 балл

10.2. *Две машины едут по загородному шоссе со скоростью 90 км/час, сохраняя дистанцию между собой в 45 метров. Минуя знак ограничения скорости, каждая из машин резко сбрасывает скорость до 50 км/час. Каким после этого будет расстояние между машинами? Ответ обосновать.*

Решение:

Способ 1. Рассмотрим двух неподвижных наблюдателей: один стоит до знака ограничения скорости, второй — после. Расстояние между наблюдателями каждая машина прошла по одному и тому же графику, значит, за одно и то же время. Значит, интервал времени между машинами один и тот же для каждого из наблюдателей. Для первого он равен $\dfrac{45 \cdot 10^{-3}}{90}$, для второго $\dfrac{x}{50}$, где x — искомое расстояние между машинами (в километрах). Отсюда $x = 25 \cdot 10^{-3}$ км $= 25$ м.

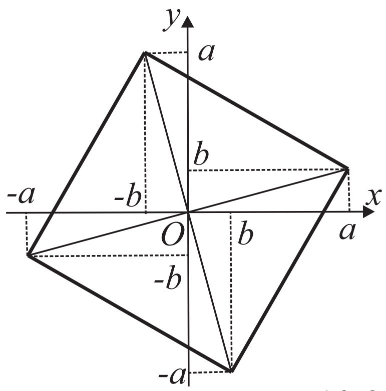
Способ 2. В момент, когда первая машина проехала знак ограничения скорости, вторая находилась на расстоянии 45 метров до этого знака. Это расстояние она преодолела за время $t = \dfrac{45 \cdot 10^{-3}}{90} = 5 \cdot 10^{-4}$ ч. Первая машина за это время отъехала от знака на расстояние $50t$ км, то есть на $25 \cdot 10^{-3}$ км. Это и есть новое расстояние между машинами.

Ответ: 25 метров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верный и обоснованный ответ	7 баллов
полученный ответ неверен исключительно из-за арифметических ошибок	6 баллов
задача не решена, но имеется указание того, что временной интервал между машинами всегда одинаков	3 балла
верный ответ без обоснования	1 балл

10.3. *Каждой точке координатной плоскости xOy поставим в соответствие произведение ее координат, которое назовем весом точки. Докажите, что сумма весов всех четырёх вершин квадрата одна и та же для любых двух квадратов с общим центром.*

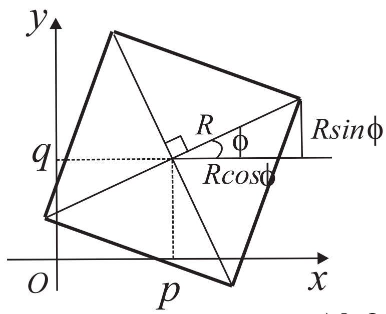


к решению задачи 10.3, первый способ

Решение:

Способ 1. Докажем сначала утверждение задачи для квадратов, центры которых совпадают с началом координат. Если диагонали совпадают с осями, то все веса вершин равны нулю, нулю равна и их сумма. Пусть диагонали квадрата с осями не совпадают. Тогда в каждой из координатных четвертей находится ровно одна вершина. Пусть координаты вершины, находящейся в первой четверти, равны $(a;\ b)$ (см. рисунок). Тогда из равенства прямоугольных треугольников вида O — вершина квадрата — проекция этой вершины на ближайшую к ней ось координат легко находятся координаты трёх других вершин: $(b;\ -a)$, $(-a;\ -b)$ и $(-b;\ a)$, если идти по часовой стрелке. Сумма весов вершин равна $ab - ab + ab - ab = 0$. Случай, когда центр квадрата совпадает с началом координат, разобран.

Теперь пусть центр квадрата находится в точке с координатами $(p;\ q)$. Рассмотрим квадрат, полученный из исходного параллельным переносом на вектор $\{-p;\ -q\}$. Центр этого нового квадрата совпадёт с началом координат, а координаты новых вершин будут $(a;\ b)$, $(b;\ -a)$, $(-a;\ -b)$ и $(-b;\ a)$ для некоторых чисел a и b. Тогда координаты исходного квадрата равны $(a + p;\ b + q)$, $(b + p;\ -a + q)$, $(-a + p;\ -b + q)$ и $(-b + p;\ a + q)$. Подсчитаем сумму весов: $(a+p)(b+q) + (b+p)(-a+q) + (-a+p)(-b+q) + (-b+p)(a+q) = 4pq$. Таким образом, указанная сумма не зависит от вершин квадрата, а только от координат его центра.



к решению задачи 10.3, второй способ

Способ 2. Пусть центр квадрата находится в точке с координатами $(p; q)$. Пусть, кроме того, R — радиус описанной около квадрата окружности, φ — угол между одной из диагоналей квадрата и осью абсцисс ($0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$). Тогда угол между второй диагональю и осью абсцисс равен $\varphi + 90°$. Концы первой диагонали будут иметь координаты $(p + R\cos\varphi; q + R\sin\varphi)$ и $(p - R\cos\varphi; q - R\sin\varphi)$ — здесь мы предположили без ограничения общности, что первой диагональю является та, которая идёт вправо-вверх. Сумма их весов будет равна

$$(p + R\cos\varphi)(q + R\sin\varphi) + (p - R\cos\varphi)(q - R\sin\varphi) = 2pq + 2R^2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Аналогично, сумма весов концов второй диагонали равна

$$2pq - 2R^2\cos(\varphi + 90°)\sin(\varphi + 90°) = 2pq - 2R^2\cos\varphi\sin\varphi.$$

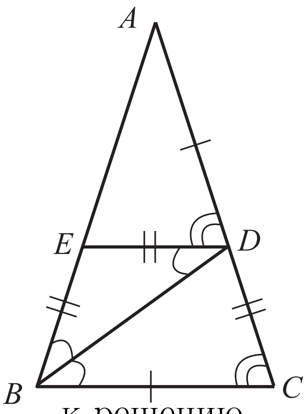
А сумма весов всех четырёх вершин будет равна $4pq$, то есть будет одинаковой для всех квадратов с указанным центром.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
верно записаны (через параметры) координаты всех четырёх вершин произвольного квадрата, но утверждение не доказано, так как при дальнейших вычислениях допущены алгебраические ошибки	4 балла
задача не решена, но показано, как меняется сумма весов вершин квадрата при его параллельном переносе или имеется попытка записать координаты вершин произвольного квадрата, но эти координаты не найдены (найдены с ошибками)	3 балла
рассмотрен только случай квадратов с центром в начале координат или сформулировано, но не доказано утверждение, что сумма весов вершин квадрата равна учетверённому весу его центра	2 балла
рассмотрены только квадраты с диагоналями, параллельными осям координат и/или со сторонами, параллельными осям координат	1 балл
рассмотрено конечное число квадратов	0 баллов

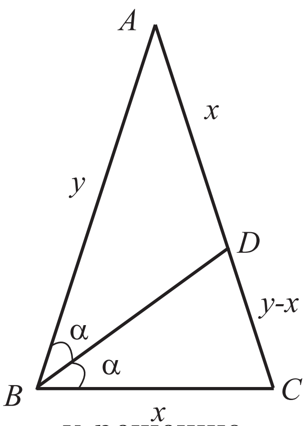
10.4. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD. Известно, что $AD = BC$. Докажите, что $BD = BC$.*

Решение:



к решению задачи 10.4, первый способ

Способ 1. Проведём через точку D прямую, параллельную основанию треугольника. Пусть она пересекает сторону AB в точке E — см. рисунок. Тогда $\angle EDB = \angle DBC$ (внутренние накрест лежащие). Так как BD — биссектриса, $\angle DBC = \angle DBA$, тогда $\angle EDB = \angle DBA$ и треугольник BDE равнобедренный ($BE = ED$). Так как в трапеции $BEDC$ углы при основании равны, то она равнобедренная $BE = CD$. Итак, $ED = CD$. Кроме того $\angle ACB = \angle ADE$ (соответственные при параллельных DE и BC и секущей DC). Тогда треугольники ADE и BCD равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD = AE$. Остаётся заметить, что треугольник ADE равнобедренный, то есть $BD = AE = AD = BC$, что и требовалось доказать.



к решению задачи 10.4, второй способ

Способ 2. Пусть боковая сторона треугольника равна y, основание равно x, угол при основании 2α — см. рисунок. По свойству биссектрисы $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$, то есть $\dfrac{x}{y-x} = \dfrac{y}{x}$ $(*)$ или $y^2 - xy = x^2$ $(**)$. Пусть $BD = l$. По теореме косинусов для треугольников ADB и CDB имеем систему $\begin{cases} x^2 + l^2 - 2xl\cos\alpha &= (y-x)^2 \\ y^2 + l^2 - 2yl\cos\alpha &= x^2 \end{cases}$. Умножив первое уравнение на y, а второе — на x и вычитая одно из другого, получим уравнение $xy(y-x) - l^2(y-x) = x^3 - y(y-x)^2$. Разделив обе части на $y - x$ и учитывая (*), получим $xy - l^2 = x^2\dfrac{y}{x} - y(y-x) \Leftrightarrow l^2 = y^2 - xy$. В силу (**) $l^2 = x^2$, то есть $l = x$, что и требовалось доказать.

Способ 3. Покажем, что условию задачи удовлетворяет равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине. Действительно, если $\angle A = 36^\circ$, то $\angle B = \angle C = 72^\circ$, $\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$ и $\angle BDC = 180^\circ - \angle C - \angle CBD = 72^\circ$. Тогда треугольники ABD и CBD оба равнобедренные (у каждого два равных угла), значит, $AD = DB = BC$. Конечно, в этом случае доказательство утверждения очевидно.

Покажем, что других треугольников, удовлетворяющих условию, нет. Рассмотрим равнобедренные треугольники с постоянным основанием BC. Пусть точка F отрезка AC такова, что $AF = BC$. Как было показано, для треугольника с углами 36°, 72°, 72° она совпадает с точкой D. При увеличении угла B при основании равнобедренного треугольника увеличивается его боковая сторона AB, поэтому увеличиваются и отношение $\dfrac{AB}{BC}$ (ведь BC — константа), и равное ему отношение $\dfrac{AD}{DC}$. С другой стороны, при этом увеличивается длина CF, значит, отношение $\dfrac{AF}{FC}$ уменьшается. (При уменьшении угла при основании происходит обратное: отношение $\dfrac{AD}{DC}$ уменьшается, а отношение $\dfrac{AF}{FC}$ увеличивается). Разность $\dfrac{AD}{DC} - \dfrac{AF}{FC}$ монотонно возрастает с ростом угла при основании, значит, обращается в ноль не более одного раза. Остаётся заметить, что она равна нулю, если точки F и D совпадают.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
через параметры исходного треугольника выражены и отрезок AD (CD) и биссектриса BD, но их равенство не показано	6 баллов
верно составлена, но не решена (или решена неверно) система уравнений, из которой выводится доказательство	5 баллов
через параметры исходного треугольника выражена одна из двух величин: отрезок AD (CD), либо биссектриса BD; или доказано, что все треугольники с данным условием подобны друг другу;	3 балла
рассмотрен случай треугольника с углами 36°, 72°, 72°; в общем случае решения нет	2 балла
осуществлены дополнительные построения, нужные для решения, хотя решения нет	1 балл
любые алгебраические или геометрические выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

10.5. *Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет действительных корней.*

Решение:

Способ 1. Парабола — график квадратного трёхчлена — должна касаться одновременно прямых $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, в частности, лежать целиком в одном из четырёх углов, частей, на которые эти прямые делят плоскость. Это не могут быть углы, смотрящие влево или вправо, так как ось параболы вертикальна. Значит, график лежит либо в верхнем, либо в нижнем углу (и касается его сторон). Но вершина углов — точка пересечения прямых $(1; 0)$ — лежит на оси абсцисс, поэтому парабола ось абсцисс не пересекает.

Способ 2. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Тогда уравнения, которые даны в условии задачи, несложно сводятся к равенствам $ax^2 + (b-1)x + c + 1 = 0$ и $ax^2 + (b+2)x + c - 2 = 0$ соответственно. Условие задачи говорит, что дискриминанты трёхчленов, стоящих в левых частях этих уравнений равны нулю, то есть выполнена система $\begin{cases} (b-1)^2 & = & 4a(c+1) \\ (b+2)^2 & = & 4a(c-2) \end{cases}$. Вычитая из одного уравнения другое, получим после преобразований, что $b = -2a - 0{,}5$. Подставив это значение

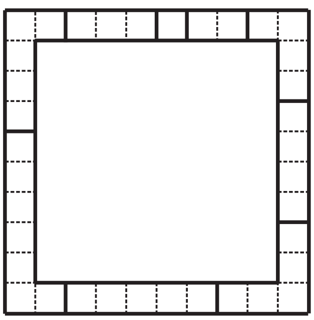
b в любое из уравнений системы, выразим c через a. Получим $c = a + \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{16a}$. Тогда $b^2 - 4ac = (2a + 0{,}5)^2 - 4a^2 - 2a - 2{,}25 = -2 < 0$, то есть дискриминант квадратного трёхчлена $f(x)$ отрицателен, и сам трёхчлен корней не имеет.

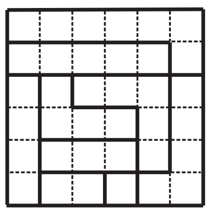
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
ход доказательства верен, но имеются арифметические ошибки, не влияющие на суть дела	6 баллов
указано, что график трёхчлена должен касаться прямых $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, но задача не дорешена, так как прямые построены неверно	5 баллов
верно составлена система уравнений, выражающая условие задачи через коэффициенты исходного трёхчлена, но из неё не выведена отрицательность дискриминанта	3 балла
верно проанализировано некоторое бесконечное семейство трёхчленов, напр. все трёхчлены со старшим коэффициентом 1	2 балла
верно построены прямые $y = x - 1$ и $y = 2 - 2x$, при этом из работы не следует, что эти прямые —- касательные к графику трёхчлена	1 балл
любые выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

10.6. *Оля сделала себе столешницу в виде клетчатого квадрата* 10×10 *(линии сетки параллельны сторонам квадрата и каждая клетка имеет размер* 1×1*). Миша лобзиком выпилил в середине квадрат* 8×8 *(границы квадрата идут по линиям сетки). Оля распилила оставшуюся рамку из* 36 *клеток по линиям сетки на попарно различные части (не совпадающие наложением) и сложила из них новую столешницу размером* 6×6. *Какое максимальное число частей могло у неё получиться? Ответ обосновать.*

Решение: Получившиеся у Оли части — это либо прямоугольники ширины 1, либо уголки, причём уголков не больше четырёх. Существует только один элемент площади 1 — квадрат размером 1×1, один элемент площади 2 — прямоугольник

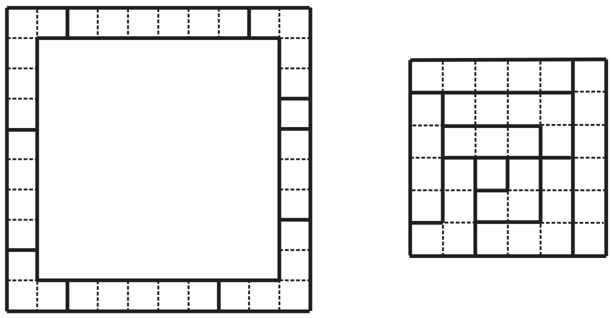




К решению задачи 10.6

1×2, два элемента площади 3 — прямоугольник и уголок, два элемента площади 4 — прямоугольник и уголок, три элемента площади 5 — прямоугольник и два уголка. Суммарная площадь этих девяти самых маленьких элементов равна 32. Остальные элементы занимают площадь, большую 5, поэтому суммарная площадь любых 10 различных частей не меньше, чем 38. Значит, у Оли могло получиться не более 9 частей. Пример, приведённый на рисунке, показывает, что ровно 9 частей может получиться.

Примечание: Пример для девяти частей не единственный. Даже набор элементов разрезания может быть другим. Например, возможно такое решение.



К решению задачи 10.6

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
верный и полностью обоснованный ответ (имеется и оценка и пример)	7 баллов
есть верная оценка (доказательство, что частей не больше 9) и верный пример разрезания рамки, но отсутствует способ сложения новой столешницы	5 баллов
примера нет, но есть верное доказательство, что частей не может быть больше 9	3 балла
показано, как разрезать рамку на 9 различных частей и как сложить из них новую столешницу	2 балла
приведён верный пример разрезания рамки (на 9 различных частей), но не показано, как из них сложить квадрат	1 балл
примеры, когда частей меньше 9, или среди них есть одинаковые, а также любые не точные оценки (доказательства, что число частей меньше какого-то числа, большего 10)	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014 – 2015 учебном году

11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *Бесконечная арифметическая прогрессия, целиком состоящая из натуральных чисел, содержит число a и его квадрат. Докажите, что она содержит и куб числа a.*

Решение:

Способ 1. Утверждение очевидно, если $a = 1$ (в этом случае $a^2 = a^3 = 1 = a$). Пусть $a > 1$. Рассмотрим другую арифметическую прогрессию. Прогрессию, у которой первый член равен a, второй равен a^2. Эта вторая прогрессия полностью состоит из элементов первой, так как её разность (равная $a^2 - a = d$) в целое число раз больше разности исходной прогрессии. Но $a^3 = a \cdot a^2 = a(a + d) = a^2 + ad = a + d + ad = a + (a + 1)d$, и так как a — натуральное число, a^3 является членом новой прогрессии с номером $a + 2$. Утверждение доказано.

Способ 2. Будем считать, что $a > 1$ (случай $a = 1$ тривиален). Тогда $a < a^2 < a^3$, так как a — натуральное число. По условию прогрессия не убывающая, иначе бы в ней присутствовали отрицательные числа. Можно считать, что a — первый член прогрессии. Пусть $a^2 = a + nd$, где d — разность. Тогда $a^3 - a^2 = a(a^2 - a) = and$ и $a^3 = a^2 + and = a + d(n + an)$ — член прогрессии с номером $n + an - 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
в верном доказательстве опущен случай $a = 1$	6 баллов
задача решена для случая прогрессии, в которой a — первый член, а a^2 — второй	4 балла
имеется верное выражение для чисел a, a^2 и a^3 через первый член и разность прогрессии	3 балла
есть идея (не доведённая до решения) рассмотреть прогрессию, в которой числа a и a^2 последовательные	2 балла
рассмотрен случай постоянной $a = 1$	1 балл
рассмотрены конкретные прогрессии (в конечном количестве)	0 баллов

11.2. $\overline{ABC}$ *— трёхзначное число, то есть* $\overline{ABC} = 100A + 10B + C$*, где* A, B, C *— цифры, и* $A \neq 0$. *Может ли сумма* $\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB}$ *быть квадратом натурального числа? Ответ обосновать.*

Решение: Указанная сумма равна $111(A + B + C)$. Она делится на 111, и, так как в разложении числа 111 на простые множители присутствуют только первые степени, делится и на 111^2. Тогда $A + B + C$ должно делиться на 111, что невозможно, так как $1 \leqslant A + B + C \leqslant 27$.

Примечание: Достаточно рассматривать делимость на 37.

Ответ: Не может.
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
задача решена в неверном допущении, что число 111 — простое	5 баллов
задача сведена к доказательству факта, что число $111(A + B + C)$ (или $111A + 111B + 111C$) не является квадратом	3 балла
ответ без обоснования и/или иллюстрация факта примерами	0 баллов

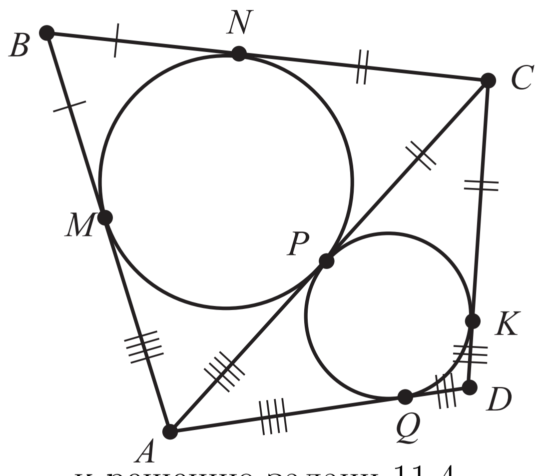
11.3. *Баба–Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов, при этом общее количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в* 12 *раз больше, чем на мухоморах Кощея. Когда Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в* 7 *раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не менее* 20 *мухоморов.*

Решение: Пусть на мухоморах Кощея a крапинок; тогда на мухоморах Бабы Яги $12a$ крапинок. Пусть на отданном Кощею мухоморе b крапинок; тогда имеем, что $12a - b = 7(a + b)$, откуда $5a = 8b$ или $a = 1{,}6b$. На оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок $12a - b = 18{,}2b$, то есть более, чем в 18 раз больше, чем на отданном мухоморе. Так как на каждом из оставшихся мухоморов крапинок не больше, чем на отданном, то осталось у Яги не меньше 19 мухоморов, а всего она собрала не меньше 20.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
в верном решении есть вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения	6 баллов
найдено отношение количества оставшихся у Бабы Яги крапинок (или общего числа её крапинок) к количеству отданных	4 балла
обоснованно получено диофантово уравнение, ведущее к решению	3 балла
сформулировано утверждение, что достаточно показать (или имеется попытка доказать), что на оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок больше, чем в 18 раз больше, чем на отданном	2 балла
наличие (отсутствие) примера, показывающее непротиворечивость условия и/или разбор (не разбор) случая, когда на мухоморах вообще нет крапинок	баллы не ставить, но и не снижать

11.4. *$ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются друг друга. Докажите, что касаются друг друга и окружности, вписанные в треугольники BCD и BAD.*

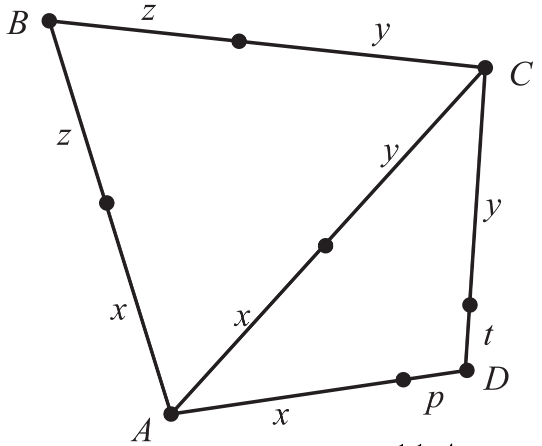


к решению задачи 11.4, необходимость

Решение: Покажем, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, касаются друг друга тогда и только тогда, когда в четырёхугольник можно вписать окружность. Из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Необходимость. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC касается его сторон AB, BC и AC в точках M, N и P соответственно, а окружность, вписанная в треугольник ADC касается сторон AD, DC и AC в точках Q, K и P соответственно. Тогда $BM = BN$, $DQ = DK$, $AM = AP = AQ$ и $CN = CP = CK$ (см. рисунок), откуда суммы противоположных сторон четырёхугольника $ABCD$ равны, и он описанный.

Достаточность. Пусть нам дан четырёхугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность. Это значит, что $AB + CD = AD + BC$. Проведём в четырёхугольнике диагональ AC и отметим в треугольнике ABC точки касания вписанной в этот треугольник окружности. Пусть расстояния от точек касания до вершин A, B и C равны x, z и y соответственно (см. рисунок).



к решению задачи 11.4, достаточность

Отложим на луче AD отрезок длины x, а на луче CD — отрезок длины y. Заметим, что в силу неравенства $AD + CD > AC = x + y$ хотя бы один из концов отрезков попадает на сторону четырёхугольника, а не на её продолжение. Пусть до вершины D остаются отрезки длины p и t соответственно (если конец попал на продолжение стороны, соответствующую длину будем считать отрицательной). Из равенства $AB + CD = AD + BC$ следует, что $x + z + y + t = x + p + y + z$, откуда $p = t$. Так как величины p и t не могут быть отрицательными одновременно, то они обе положительны, и отмеченные точки лежат на сторонах четырёхугольника (а не на продолжениях). Из доказанного равенства $p = t$ следует, что отмеченные на сторонах треугольника ACD точки являются точками касания вписанной в треугольник окружности, то есть то, что нам и надо доказать.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
доказано только одно из двух следующих утверждений 1) из условия задачи следует вписанность четырёхугольника; 2) обратное утверждение к указанному выше	4 балла
сформулировано утверждение, что условие задачи равносильно вписанности четырёхугольника (при отсутствии доказательства как в одну, так и в другую сторону)	1 балл
любые рассуждения, не ведущие к решению	0 баллов

11.5. *Пусть $a > 0$, $b > 0$. Докажите неравенство* $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

Решение:

Способ 1. Пусть $a^{10} = x$, $b^{15} = y$. Тогда неравенство принимает вид $2x^5 + 3y^5 \geqslant 5x^2y^3$. Теперь положим $t = \dfrac{y}{x}$ (t может быть любым положительным числом) и получим неравенство $3t^5 - 5t^3 + 2 \geqslant 0$, Проанализируем функцию в левой части неравенства. Её производная равна $15t^4 - 15t^2$, поэтому на отрезке $[0, 1]$ функция убывает, а на луче $[1, +\infty)$ - возрастает. Остаётся заметить, что в точке $t = 1$ функция равна 0.

Примечание: Анализ функции $f(t) = 3t^5 - 5t^3 + 2$ можно провести и не используя производную. Например так. Разложим многочлен на множители $3t^5 - 5t^3 + 2 = (t-1)(3t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 2t - 2) = (t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2)$. При $t > 0$ все слагаемые второй скобки неотрицательны, а одно равно 2, то есть выражение во второй скобке строго положительно. Значит, при $t > 0$ минимум функции равен 0 и достигается в точке $t = 1$.

Способ 2. После замены, как в первом способе (замену можно и вовсе не делать, но тогда выкладки будут менее наглядными) докажем полученное неравенство $2x^5 + 3y^5 \geqslant 5x^2y^3 \Leftrightarrow 2x^5 + 3y^5 - 5x^2y^3 \geqslant 0$ для положительных чисел x и y. Проведём преобразования левой части

$$2x^5 + 3y^5 - 5x^2y^3 = 2x^5 - 2x^2y^3 + 3y^5 - 3x^2y^3 = 2x^2(x^3 - y^3) - 3y^3(x^2 - y^2) =$$

$$= (x-y)(2x^2(x^2+xy+y^2) - 3y^3(x+y)) = (x-y)(2x^4+2x^3y+2x^2y^2-3xy^3-3y^4) =$$

$$= (x - y)(2x^4 - 2y^4 + 2x^3y - 2xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + x^2y^2 - y^4) =$$

$$= (x-y)(2(x-y)(x+y)(x^2+y^2)+2xy(x-y)(x+y)+xy^2(x-y)+y^2(x-y)(x+y)) =$$

$$= (x - y)^2(2(x + y)(x^2 + y^2) + 2xy(x + y) + xy^2 + 2(x + y)).$$

Теперь неотрицательность полученного выражения очевидна: первый множитель — квадрат некоторого выражения, то есть неотрицателен, а все слагаемые второго множителя, значит, и он сам, положительны.

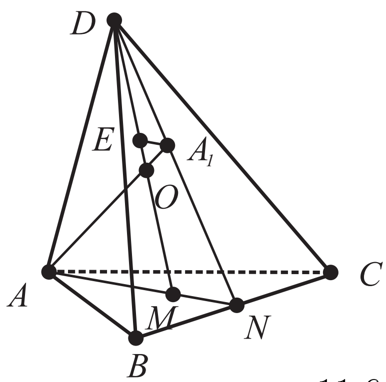
Примечание: На самом деле задача решается в одну строчку, если знать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n положительных чисел, которое выглядит так $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i}$ (все $a_i \geqslant 0$). Надо только взять $n = 5$, $a_1 = a_2 = \sqrt{a}$ и $a_3 = a_4 = a_5 = \sqrt[3]{b}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
при верном ходе решения есть алгебраические ошибки, не влияющие на доказательство	6 баллов
при разложении на множители допущена одна алгебраическая ошибка, не позволившая доказать неравенство	4 балла
неравенство верно сведено к анализу функции от одной переменной (явно указана функция), но анализ не проведён или имеется попытка разложить выражение на множители, но разложение не доведено до конца (напр. только выделен множитель $x-y$)	3 балла
замечена однородность данного неравенства, то есть то, что после деления обеих частей на a или b получается неравенство одной переменной	2 балла
сделана замена, избавляющая неравенство от иррациональных выражений	1 балл
иллюстрация утверждения на конкретных примерах и/или любые выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

От школьника не требуется приведение доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим n положительных чисел, даже если это неравенство используется в решении.

11.6. *Пусть M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$. На отрезке MD произвольным образом выбрана точка O. Лучи AO, BO, CO пересекают боковые грани пирамиды в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию пирамиды.*

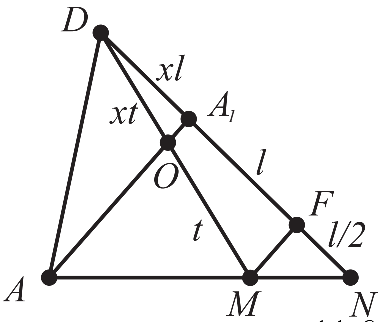


к решению задачи 11.6, первый способ, рисунок 1

Решение:

Способ 1. Рассмотрим плоскость AND, где N — середина ребра BC. Эта плоскость проходит и через точку M, следовательно, через точку O, следовательно, через прямую AO и через точку A_1. Проведём в плоскости сечения прямую A_1E параллельно AN (E — точка пересечения этой прямой с отрезком DM — см. рисунок 1). Тогда точка E — точка пересечения отрезка DM с плоскостью, проходящей через точку A_1 параллельно основанию ABC. Нам достаточно доказать, что длина DE не зависит от того, какую из вершин основания мы возьмёи в качестве A. Из подобия треугольников A_1ED и NMD следует, что $\dfrac{DE}{DM}=\dfrac{DA_1}{DN}$, то есть длина отрезка DE зависит только от отношения $\dfrac{DA_1}{DN}$. Выразим это отношение через отношение $\dfrac{DO}{OM}$ которое не зависит от выбора вершины основания. Пусть $\dfrac{DO}{OM} = x$. Проведём через точку M прямую, параллельную прямой AO. Пусть эта прямая пересекает отрезок DN в точке F — см.рисунок 2.

Из подобия треугольников DA_1O и DFM получаем, что $\dfrac{DA_1}{A_1F} = \dfrac{DO}{OM} = x$, то есть если $A_1F = l$, то $DA_1 = xl$. Из подобия треугольников NMF и NAA_1 и того факта, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC, следует равенство $A_1F = 2FN$, то есть $FN = l/2$. Но тогда $\dfrac{DA_1}{DN} = \dfrac{xl}{xl + l + 0{,}5l} = \dfrac{x}{x + 1{,}5}$. Мы достигли своей цели, показав, что отношение $\dfrac{DA_1}{DN}$ не зависит от выбора вершины основания.



к решению задачи 11.6, первый способ, рисунок 2

Примечание 1: Доказательство независимости можно было провести и иначе. Например, можно сослаться на теорему Менелая для треугольника NDM и секущей A_1O. Согласно этой теореме, отношение $\dfrac{DA_1}{DN}$ определяется дробями $\dfrac{DO}{OM}$ и $\dfrac{NA}{AM}$, а так как последняя равна 2, то только дробью $\dfrac{DO}{OM}$. Независимость доказана, а с ней и всё утверждение задачи.

<u>Способ 2.</u> Докажем параллельность прямых $AB \parallel A_1B_1$. (Аналогично можно доказать, что $AC \parallel A_1C_1$ и этого будет достаточно для полного обоснования утверждения задачи.) Рассмотрим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. Выразим через них векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$. Ясно, что $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$. Для нахождения вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ разложим по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{DA_1}$. Так как при таком разложении векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равноправны, то в само разложение эти векторы входят с одинаковыми коэффициентами, то есть $\overrightarrow{DA_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \beta\vec{c}$ для некоторых чисел α и β. Но разложение по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора $\overrightarrow{DB_1}$ будет таким же с точностью до обозначений, то есть $\overrightarrow{DB_1} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ (коэффициенты α и β те же самые!). Значит, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DA_1} = (\beta - \alpha)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = (\alpha - \beta)\overrightarrow{AB}$, то есть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарны. Утверждение доказано.

Примечание 2: Не сложно (хотя и несколько громоздко) выразить вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в явном виде. Например, можно сделать так. Легко доказывается (причём разными способами), что $\overrightarrow{DM} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$. Так как точка O лежит на отрезке DM, векторы $\overrightarrow{DO}$ и $\overrightarrow{DM}$ коллинеарны, поэтому для некоторого числа t имеет место равенство $\overrightarrow{DO} = t\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}$, а тогда $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\vec{a} + t\vec{a} + t\vec{b} + t\vec{c}$. Из коллинеарности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ следует, что $\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{AO} = k(t-1)\vec{a} + kt\vec{b} + kt\vec{c}$. Теперь $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} = (1 + k(t-1))\vec{a} + kt\vec{b} + kt\vec{c}$. Так как вектор $\overrightarrow{DA_1}$ лежит

в плоскости векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, при его разложении по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коэффициент при $\vec{a}$ равен нулю, поэтому $1+k(t-1)=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{1-t}$. Значит, $\overrightarrow{DA_1}=\dfrac{t}{1-t}\vec{b}+\dfrac{t}{1-t}\vec{c}$. Аналогично, $\overrightarrow{DB_1}=\dfrac{t}{1-t}\vec{a}+\dfrac{t}{1-t}\vec{c}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DA_1}=\dfrac{t}{1-t}\vec{a}-\dfrac{t}{1-t}\vec{b}$.

Примечание 3: Задача имеет планиметрический аналог, а именно: пусть на медиане CM треугольника ABC отмечена точка O. Обозначим через A_1 точку пересечения прямых AO и BC, через B_1 — прямых BO и AC. Тогда прямые AB и A_1B_1 параллельны.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
верное доказательство	7 баллов
в верном доказательстве имеются посторонние неверные утверждения	6 баллов
при верно проводимом (виден до конца ход решения) векторном (координатном) доказательстве есть арифметические ошибки, не позволившие доказать утверждение	5 баллов
задача сведена к планиметрической, или задача полностью переформулирована на языке векторов и/или координат, но новая задача не решена	3 балла
имеется идея рассмотреть точку пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ и прямой DM или доказать, что точки A_1 B_1 и C_1 лежат “на одной высоте” (равноудалены от плоскости основания)	2 балла
обосновано, что точки A_1 B_1 и C_1 (хотя бы одна из них) лежит на медиане боковой грани	1 балл
разобран случай правильной пирамиды	0 баллов